ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ 194

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ 188

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ 150

Α4. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$|z-4| = 2|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2 = 2^2|z-1|^2 \Leftrightarrow (z-4)(\bar{z}-4) = 4(z-1)(\bar{z}-1) \Leftrightarrow$$
$$z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 16 = 4z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 4 \Leftrightarrow 12 = 3z\bar{z} \Leftrightarrow z\bar{z} = 4 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2$$

Αρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z είναι ο κύκλος με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ=2.

Β2.

$$w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow w = \bar{w} \Leftrightarrow \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = \left(\overline{\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}}\right) \Leftrightarrow \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = \frac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{2\bar{z}_2}{\bar{z}_1} \Leftrightarrow$$

$$2z_1z_1\bar{z}_2\bar{z}_1 + 2z_2z_2\bar{z}_2\bar{z}_1 = 2\bar{z}_1z_2z_1\bar{z}_1 + 2\bar{z}_2z_1z_2\bar{z}_2 \Leftrightarrow 2|z_1|^2 z_1\bar{z}_2 + 2|z_1|^2\bar{z}_1z_2 = 2|z_1|^2\bar{z}_1z_2 + 2|z_1|^2 z_1\bar{z}_2 \Leftrightarrow$$ που

$$8z_1\bar{z}_2 + 8\bar{z}_1z_2 = 8\bar{z}_1z_2 + 8z_1\bar{z}_2$$

ισχύει άρα $w \in \mathbb{R}$

Β3.

$$|w| = \left|\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}\right| = \left|\frac{2z_1^2 + 2z_2^2}{z_1z_2}\right| = \frac{|2z_1^2 + 2z_2^2|}{|z_1z_2|} = \frac{2|z_1^2 + z_2^2|}{4} =$$
$$= \frac{1}{2}|z_1^2 + z_2^2| \le \frac{1}{2}\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) = \frac{1}{2}8 = 4$$

Αρα $|w| \le 4$ και επειδή αποδείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι $w \in \mathbb{R}$ από ιδιότητες απόλυτης τιμής ισχύει $|w| \le 4 \Rightarrow -4 \le w \le 4$

Β4.

$$w=-4\Rightarrow\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}=-4\Rightarrow 2z_1^2+2z_2^2=-4z_1z_2\Rightarrow$$

$$z_1^2+z_2^2=-2z_1z_2\Rightarrow z_1^2+z_2^2+2z_1z_2=0\Rightarrow(z_1+z_2)^2=0\Rightarrow$$

$$z_1+z_2=0\Rightarrow z_1=-z_2\ \ (1)$$

$$(AB)=|z_1-z_2|\overset{(1)}{=}|z_1+z_1|=2|z_1|=4$$

$$(B\Gamma)=|z_2-z_3|=|-z_1-2iz_1|=|z_1||1+2i|=2\sqrt{5}$$

$$(A\Gamma)=|z_1-z_3|=|z_1+2iz_1|=|z_1||1+2i|=2\sqrt{5}$$

Παρατηρούμε ότι (ΒΓ)=(ΑΓ) άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.