Απαντήσεις στα Μαθηματικά Προσανατολισμού

Νέο Σύστημα

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο Σελ. 76

Α2. Σχολικό Βιβλίο Σελ. 104

Α3. α) ΨΕΥΔΗΣ

β) Σχολικό Βιβλίο Σελ. 136

Α4) α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

$f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$

· $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$. $D_f = \{ x \in \mathbb{R} / x - 1 \neq 0 \}$

$= \{ x \in \mathbb{R} | x \neq 1 \}$

· $g(x) = e^x$. $D_g = \mathbb{R}$

B1. $D_{f \circ g} = \{ x \in \mathbb{R} | x \in D_g$ και $g(x) \in D_f \}$

$= \{ x \in \mathbb{R}$ και $e^x > 1 \}$

$= (0, +\infty)$

· $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \dfrac{g(x) + 2}{g(x) - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (f \circ g)(x) = \dfrac{e^x + 2}{e^x - 1}$

B2. $(f\circ g)(x) = \dfrac{e^x+2}{e^x-1}$, $x>0$

Η $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$(f\circ g)'(x) = \left(\frac{e^x+2}{e^x-1}\right)' = \frac{e^x\cdot(e^x-1)-(e^x+2)\cdot e^x}{(e^x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f\circ g)'(x) = \frac{\cancel{e^{2x}}-e^x-\cancel{e^{2x}}-2e^x}{(e^x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f\circ g)'(x) = \frac{-3e^x}{(e^x-1)^2} < 0, \ \forall\, x>0$$

Η $(f\circ g)(x)$ είναι γν. φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ άρα 1-1 άρα υπάρχει η αντίστροφη $(f\circ g)^{-1}(x)$

$$D_{(f\circ g)^{-1}} = (f\circ g)(D_{f\circ g}) = (f\circ g)((0,+\infty)) \underset{=}{\overset{f\circ g \downarrow}{}}$$

$$= \left(\lim_{x\to+\infty} f\circ g,\ \lim_{x\to 0^+} f\circ g\right) = (1, +\infty)$$

καθώς $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f\circ g = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+2}{e^x-1} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x+2)'}{(e^x-1)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

και για $x>0 \Rightarrow e^x > e^0 \Rightarrow e^x-1>0$

με $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f\circ g = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x+2}{e^x-1} =$

$$= \lim_{x\to 0^+}(e^x+2)\cdot \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{e^x-1} = +\infty$$

Το Πεδίο ορισμού της αντίστροφης $(f\circ g)^{-1}(x)$

είναι $D_{(f\circ g)^{-1}} = (1, +\infty)$

Για $x>0$ και $y>1$

θέτουμε $y=(f\circ g)(x) \Leftrightarrow y=\dfrac{e^x+2}{e^x-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y\cdot(e^x-1)=e^x+2 \Leftrightarrow ye^x-y=e^x+2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ye^x-e^x=2+y \Leftrightarrow (y-1)e^x=y+2 \Leftrightarrow$

$\overset{y-1\neq 0}{\underset{y>1}{\Leftrightarrow}} e^x=\dfrac{y+2}{y-1} \overset{y>1}{\underset{\frac{y+2}{y-1}>0}{\Leftrightarrow}} x=\ln\left(\dfrac{y+2}{y-1}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f\circ g^{-1}(y)=\ln\left(\dfrac{y+2}{y-1}\right)$, οπότε

$(f\circ g)^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$

Β3.

$\varphi(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$ παραγωγ.

στο $(1,+\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων

συναρτήσεων με $\varphi'(x) = \left[\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right]' \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi'(x) = \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}} \cdot \left(\frac{x+2}{x-1}\right)' \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi'(x) = \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{(x+2)'(x-1) - (x+2)(x-1)'}{(x-1)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi'(x) = \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}-2}{(x-1)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi'(x) = \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow \varphi'(x) = \frac{-3x+3}{(x+2)\cdot(x-1)^2}$

Για $x > 1 \Leftrightarrow -3x+3 < 0$ και $x+2 > 0$ και

$x-1 > 0$. Έπεται $\varphi'(x) < 0$

Επομένως η φ γν. φθίνουσα στο $(1,+\infty)$

Β1.

• Για $x>1$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+} \varphi(x) = \lim_{x\to 1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$$

Θέτουμε $u = \frac{x+2}{x-1}$ με $x>1$

καθώς $x\to 1^+$ το $u\to +\infty$

επομένως $\lim_{x\to 1^+} \varphi(x) = \lim_{u\to +\infty} \ln(u) = +\infty$

• $\lim_{x\to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$.

Θέτουμε $u = \frac{x+2}{x-1}$, με $x>1$

καθώς $x\to +\infty$ είναι $\lim_{x\to +\infty} \frac{x+2}{x-1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$

$= \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x}{x}\right) = 1$ άρα το $u\to 1$

οπότε $\lim_{x\to +\infty} \varphi(x) = \lim_{u\to 1} \ln(u) = \ln 1 = 0$.

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-x}-\ln\lambda, & x\le 0 \\ \etaμx+\lambda\sigmaυνx, & 0<x<\dfrac{3\pi}{2} \end{cases}, \ \lambda>0$$

Γ1. Η f συνεχής στο $\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right)$ άρα συνεχής στο $x_0=0$.

Για $x<0$ είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{1-x}-\ln\lambda\right)=$

$= 1-\ln\lambda \quad (1)$

Για $x>0$ είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\etaμx+\lambda\sigmaυνx)=$

$=0+\lambda\cdot 1=\lambda \quad (2)$

$f(0)=1-\ln\lambda$. Θα πρέπει:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \overset{(1)}{\underset{(2)}{\Leftrightarrow}} 1-\ln\lambda=\lambda \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln\lambda+\lambda-1=0, \ \lambda>0$

Θέτουμε $g(\lambda) = \ln\lambda + \lambda - 1$, $\lambda > 0$

Η g παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ άρα και

συνεχής με $g(1) = \ln 1 + 1 - 1 = 0$

Προφανής ρίζα $\lambda_0 = 1$

Είναι $g'(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda} + 1 > 0$ για $\lambda > 0$

Η g γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$ άρα

1-1 άρα $\lambda = 1$ μοναδική.

Γ2. Για $\lambda = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & x \le 0 \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x \le \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Για $x < 0$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\cancel{x}\,1}{\cancel{x}\cdot(1-x)}$$

$$= 1$$

Για $x>0$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{x}+\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1+0=1$$

Είναι: $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}=1$

Έπεται $f'(0)=1$

$\lambda=\varepsilon\varphi\omega=f'(0)=1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \omega=k\pi+\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}$

Άρα $\omega=\frac{\pi}{4}$.

Δ1)

$$f(x) = e^x + x^2 - e\cdot x - 1$$

$$f'(x) = e^x + 2x - e$$

$$f''(x) = e^x + 2 > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

- $f''(x) > 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$ άρα η f' γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- Η f' συνεχής στο $[0,1]$

- $f'(0) = e^0 + 2\cdot 0 - e = 1 - e < 0$
  $f'(1) = e + 2 - e = 2 > 0$ $\Big\} \rightarrow f'(0)\cdot f'(1) < 0$

Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλ. $x_0 \in (0,1)$: $f'(x_0) = 0$

Για κάθε $x > x_0 \overset{f' \nearrow}{\Longleftrightarrow} f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

Για κάθε $x < x_0 \overset{f' \nearrow}{\Longleftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			τ.ε		

Για κάθε $x > x_0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x_0)$

Για κάθε $x < x_0 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x_0)$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $f(x) \geq f(x_0)$

Συνεπώς η f παρουσιάζει στο x_0

ολικό ελάχιστο το $f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - e \cdot x_0 - 1$

Όμως $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0. \quad (1)$$

Άρα $f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - e x_0 - 1 \overset{(1)}{=} e - 2x_0 + x_0^2 - e x_0 - 1 =$

$$= x_0^2 - (e+2) \cdot x_0 + e - 1.$$

Δ2

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left\{\frac{1}{x-x_0}\left[\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}+(x-x_0)\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]\right\}$$

- Για $x>x_0$

$$\to \lim_{x\to x_0^+}\frac{1}{x-x_0}=+\infty$$

$$\to \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=0$$

Απο Δ1 για $x>x_0$ η $f(x)>0$ σε μια περιοχή κοντά στο x_0.

Άρα $\lim_{x\to x_0^+}\dfrac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=+\infty$.

$$\to \quad -1\leq \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\leq 1 \iff$$

$$\iff -(x-x_0)\leq \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\cdot(x-x_0)\leq x-x_0$$

$$\lim_{x \to x_0^+} [-(x-x_0)] = \lim_{x \to x_0^+} (x-x_0) = 0$$

Απο κριτήριο παρεμβολης ισχύει οτι:

$$\lim_{x \to x_0^+} \left[(x-x_0) \cdot ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right] = 0$$

Συνεπώς:

$$\lim_{x \to x_0^+} \left\{ \frac{1}{x-x_0} \left[\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} + (x-x_0) ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \right] \right\} =$$

$$= (+\infty) \cdot [(+\infty) + 0] = +\infty .$$

• <u>Για $x < x_0$</u>

→ $\lim_{x \to x_0^-} \frac{1}{x-x_0} = -\infty$

→ $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) = a$

Απο Δι για $x < x_0$ η $f(x) < 0$ σε μια περιοχή κοντά στο x_0.

Άρα: $\lim_{x \to x_0^-} \dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = -\infty$

Ομοίως $\lim_{x \to x_0^-} \left[(x-x_0) \cdot ημ\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right] = 0.$

Άρα: $\lim_{x \to x_0^-} \left\{ \dfrac{1}{x-x_0} \left[\dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} + (x-x_0) \cdot ημ\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right]\right\} =$

$= (-\infty)\left[(-\infty)+0\right] = +\infty.$

Συνεπώς:

$\lim_{x \to x_0} \left\{ \dfrac{1}{x-x_0} \left[\dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} + (x-x_0) \cdot ημ\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right]\right\} = +\infty$