ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2021

ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΓΕΛ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

ΤΟΓΙΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ-ΔΕΛΕΝΙΚΑ ΜΑΡΙΑ-ΒΕΡΕΜΗΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ-ΚΑΝΕΛΛΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ-ΑΓΟΡΓΙΑΝΙΤΗΣ ΓΙΑΝΝΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικό βιβλίο σελίδα 135
Α2. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελίδα 51
Α3. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελίδα 23
Α4. **α)** ΣΩΣΤΟ, **β)** ΛΑΘΟΣ, **γ)** $\rightarrow$ΣΩΣΤΟ **δ)** $\rightarrow$ΣΩΣΤΟ **ε)** $\rightarrow$ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

Β.1) Θέτω u το $x+1$,άρα $-x=1-u$,οπότε $f(u)=u\cdot e^{1-u}$ ή $f(x)=x\cdot e^{1-x}$.

Β.2)Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ με

$f'(x)=(x)'e^{1-x}+x\cdot(e^{1-x})'=e^{1-x}+x\cdot(-e^{1-x})=e^{1-x}-x\cdot e^{1-x}=e^{1-x}(1-x)$.

Είναι: $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{1-x}(1-x)=0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$

Ακόμα: $f'(x)>0 \Leftrightarrow e^{1-x}(1-x)>0 \Leftrightarrow 1-x>0 \Leftrightarrow x<1$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ και παρουσιάζει στο $x_0=1$ ολικό μέγιστο το $f(1)=1$.

Β.3)΄Εχουμε:

$f''(x)=(e^{1-x})'-(x\cdot e^{1-x})'=-e^{1-x}-[(x)'\cdot e^{1-x}+x\cdot(e^{1-x})']=-e^{1-x}-(e^{1-x}-x\cdot e^{1-x})=e^{1-x}(x-2)$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2)>0 \Leftrightarrow x-2>0 \Leftrightarrow x>2$

Άρα η f είναι κυρτή στο $[2,+\infty)$ και κοίλη στο $(-\infty,2]$ και έχει σημείο καμπής το $\mathrm{A}(2,f(2))=(2,2e^{-1})$

Η συνάρτηση είναι συνεχής σε όλο το $\Re$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Έχουμε:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\cdot e^{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{1-x}=\lim\limits_{u\to-\infty}e^{u}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot e^{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xe}{e^{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e}{e^{x}}=0$

Άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y=0$ στο $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{1-x}=\lim\limits_{u\to+\infty}e^{u}=+\infty$

Άρα η C_f δεν έχει οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες στο $-\infty$.

Β.4) **i)**Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$,τότε $f(A_1)=(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),f(1)]=(-\infty,1]$ και επειδή είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$, τότε $f(A_2)=(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(1)]=(0,1)$. Άρα το σύνολο τιμών είναι το f $(\mathrm{A})=(-\infty,1]$.

ii) Διακρίνω περιπτώσεις για τις τιμές του λ.

Αν $\lambda > 1$ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη

Αν λ<0 η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μία λύση γιατί $\lambda \in f(A_1)$

Αν $0 < \lambda < 1$ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει 2 λύσεις γιατί $\lambda \in f(A_1)$ και $\lambda \in f(A_2)$

Αν $\lambda = 0$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει 1 λύση

Αν $\lambda = 1$ η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει 1 λύση

Θέμα Δ

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x)=\ln x-\frac{1}{x},\quad x\in(0,+\infty)$

Η (1) ισοδύναμα γράφεται $\ln x-\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow K(x)=0 \quad (2)$

Η K είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $K'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$

Είναι $K'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Άρα $K\nearrow(0,+\infty)$

Η K ικανοποιεί τις συνθήκες του Θ. Bolzano στο $[1,2]$, διότι είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως παραγωγίσιμη σε αυτό και:

$$\left.\begin{cases} K(1)=\ln 1-\frac{1}{1}=-1<0 \\ K(e)=\ln e-\frac{1}{e}=1-\frac{1}{e}>0 \end{cases}\right\} \text{ οπότε } K(1)K(e)<0$$

Άρα η (2) έχει ρίζα $x_o\in(1,e)\subseteq(0,+\infty)$

Επομένως η (2) έχει ρίζα στο $(0,+\infty)$ και μάλιστα μοναδική διότι $K\nearrow(0,+\infty)$

Δ2. Το x_o είναι η ρίζα της (1), άρα ισχύουν:

$$\ln x_o=\frac{1}{x_o}\ (3) \Leftrightarrow x_o\ln x_o=1 \quad (4)$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f'(x)=\ln x_o(x+1)'-(\ln x)'-(1)'=\ln x_o-\frac{1}{x}$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων και $f''(x)=\frac{1}{x^2}$

Είναι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Άρα $f'\nearrow(0,+\infty)$

Είναι $f'(x_o)=\ln x_o-\frac{1}{x_o}\overset{(3)}{=}0$ και $f'\nearrow(0,+\infty)$ οπότε:

Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ με $x < x_o$ ισχύει $f'(x) < f'(x_o) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ με $x > x_o$ ισχύει $f'(x) > f'(x_o) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

x	0		x_o		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	ο.ε.	$\nearrow$	

Η f παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο x_o το

$$f(x_o) = \ln x_o (x_o + 1) - \ln x_o - 1 =$$

$$= \cancel{x_o \ln x_o} + \cancel{\ln x_o} - \cancel{\ln x_o} - \cancel{1} \overset{(4)}{=} 0$$